Concours STIC/GIC session 2018

Composition : Mathématiques 4 (analyse, proba)

Durée : 4 Heures

PARTIE ANALYSE

On note ici $\mathcal{L}^1$ le $\mathbb{C}-$ev des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$.

Question 1 : Pour toute $f \in \mathcal{L}^1$ et tout x de $\mathbb{R}$, l'application $g : t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ continue par morceaux est intégrable sur $\mathbb{R}$ parce que :

A) f et l'application $t \longmapsto e^{-ixt}$ sont intégrables ;
B) $g(x) \longrightarrow 0$ qd $x \longrightarrow \pm\infty$.
C) f est intégrable et $|f| = |g|$
D) g est bornée
E) J'en passe.

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\mathcal{F}f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$

Elle est appelée transformée de Fourier de f .

Question 2

L'application $\mathcal{F}f$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce que :

A) $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application : $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$..

B) $\forall t \in \mathbb{R}$, l'application : $x \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$..

C) $\forall t \in \mathbb{R}$, l'application : $x \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application : $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D) $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application : $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, l'application : $x \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|f|$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

E) J'en passe.

Question 3

Pour toute $f \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{F}f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ parce que :

A) f est intégrable sur $\mathbb{R}$,
B) f est continue bornée sur $\mathbb{R}$
C) $|f|$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
D) f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
E) J'en passe.

Question 4

L'application $\mathcal{F} : \begin{cases} \mathcal{L}^1 \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f \longmapsto \mathcal{F}f \end{cases}$ est linéaire parce que :

A) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $\forall f,g \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{F}(\alpha f+\beta g) = \alpha\mathcal{F}(f)+\beta\mathcal{F}(g)$
B) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $\forall f,g \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(\alpha f+\beta g) = \alpha\mathcal{F}(f)+\beta\mathcal{F}(g)$
C) $\mathcal{L}^1$ est un $\mathbb{C}$ - ev.
D) $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ - ev.
E) J'en passe.

Question 5

Pour $T \in]0,+\infty[$, Soit $\Pi_T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application appelée porte définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 \text{ si } |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad \text{où } T \in]0,+\infty[.$$

La transformée de Fourier de Π_T est définie par :

A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\Pi_T(x) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}$,

B) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}\Pi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}$, $\mathcal{F}\Pi_T(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

C) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}\Pi_T(x) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}$, $\mathcal{F}\Pi_T(0) = 1$

D) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}\Pi_T(x) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\frac{xT}{2}}{\frac{xT}{2}}$, $\mathcal{F}\Pi_T(0) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}$

E) J'en passe.

Question 6

Soit $a \in]0,+\infty[$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $f(t) = e^{-a|t|}$.

La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ de f est définie par:

A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2\pi}(a^2+x^2)}$
B) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+x^2)}$
C) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}e^{-a|x|}$
D) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-a|x|}$.
E) J'en passe.

Question 7

Soit $a \in]0,+\infty[$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $f(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$

La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ de f est définie par:

A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+x^2)}$

B) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-a|x|}$.

C) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2\pi}(a^2+x^2)}$

D) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a|x|}$.

E) J'en passe.

Question 8

Soit $a \in]0,+\infty[$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $f(t) = e^{-a^2t^2}$.

La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ de f est définie par:

A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$

B) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}(a^2+x^2)}$

C) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$

D) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \frac{x}{a\sqrt{2}} e^{-a|x|}$.

E) J'en passe.

On rappelle que, pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t \longmapsto & f(t-a) \end{cases}$ appelée translatée de f par a.

Question 9

On suppose que $f \in \mathcal{L}^1$ et $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de a , $\tau_a f \in \mathcal{L}^1$?

A) $a \in]0,+\infty[$

B) a = 0

C) a < 0

D) $a \in \mathbb{R}$

E) J'en passe.

Question 10

Pour cette valeur de a , la transformée de Fourier de $\tau_a f$ définie par :

A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(x) = \tau_a \mathcal{F}f(x)$.

B) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(x) = e^{ixa}\mathcal{F}f(x)$.

C) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(x) = e^{-ixa}\mathcal{F}f(x)$.

D) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(x) = \mathcal{F}\tau_a f(x)$.

E) J'en passe.

Question 11

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1$, et soit l'application

$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t \longmapsto & e^{i\lambda t} f(t) \end{cases}$.

L'application g est intégrable sur :

A) $]0,+\infty[$

B) $\mathbb{R}$

C) $]\lambda,+\infty[$

D) $]-\infty;\lambda[$

E) J'en passe.

Question 12

La transformée de Fourier $\mathcal{F}g$ de g est définie par:

A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}g(x) = \tau_\lambda (\mathcal{F}f)(x)$

B) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}g(x) = (\mathcal{F}\tau_\lambda f)(x)$

C) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}g(x) = \tau_{-\lambda} (\mathcal{F}f)(x)$.

D) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}g(x) = (\mathcal{F}\tau_{-\lambda} f)(x)$

E) J'en passe.

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, $f \in \mathcal{L}^1$, et soit l'application

$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t \longmapsto & f(kt) \end{cases}$.

Question 13

La transformée de Fourier $\mathcal{F}h$ de h est définie par:

A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}h(x) = |k|\mathcal{F}f\left(\frac{x}{k}\right)$

B) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}h(x) = \frac{1}{|k|} \mathcal{F}f(kx)$

C) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}h(x) = k\mathcal{F}f\left(\frac{x}{k}\right)$

D) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}h(x) = \frac{1}{|k|} \mathcal{F}f\left(\frac{x}{k}\right)$

E) J'en passe

Question 14

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on a $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \mathcal{F}h(x) =$

A) $\frac{1}{|k|}$

B) $\frac{1}{k}$

C) 0

D) k

E) J'en passe

Question 15

Soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que la fonction $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t \longmapsto & tf(t) \end{cases}$

soit intégrable sur $\mathbb{R}$ (c-à-d : $f_1 \in \mathcal{L}^1$).

On admet que $\mathcal{F}f$ et $\mathcal{F}f_1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{F}f)'(x) =$

A) $-i \frac{d}{dx}(\mathcal{F}f_1)(x)$

B) $-i\mathcal{F}f_1(x)$.

C) $ix \frac{d}{dx}(\mathcal{F}f_1)(x)$

D) $i\mathcal{F}f_1(x)$.

E) J'en passe.

PARTIE PROBABILITE

Exercice 1 : Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(U = n) = P(V = n) = \frac{1}{4}\frac{1+\alpha^n}{n!} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Question 16) Déterminer α .

A) 4

B) $\ln(4-e)$

C) 1

D) $2\ln 2$

E) *J'en passe*

Question 17)

Déterminer, si possible, l'espérance de U .

A) $\dfrac{e+(4-e)\ln(4-e)}{4}$

B) 0

C) $2\ln 2$

D) *J'en passe*

E) U n'a pas d'espérance

Question 18)

Déterminer la loi de $U+V$ en fonction de α .

A) $\dfrac{2^k\left(1+\alpha^k\right)}{16(k!)}$

B) $\dfrac{1+\alpha^k}{k!}$

C) $\dfrac{2^k(1+\alpha)^k}{16(k!)}$

D) $\dfrac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$

E) *J'en passe*

Exercice 2 : Une machine fabrique des microprocesseurs ; dans la production, 20 % sont défectueux.

Question 19) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de microprocesseurs fonctionnant, issus d'un lot de trois microprocesseurs produits par cette machine. Déterminer la probabilité qu'il y ait dans ce lot au moins deux microprocesseurs qui fonctionnent ?

A) 0

B) 0,575

C) 0,896

D) 1

E) *J'en passe*

Question 20) Pour améliorer la fiabilité du produit fini, à la sortie de la machine on fait un test ; un produit bon est accepté avec une probabilité de 0,9 et un produit mauvais est refusé avec une probabilité de 0,6.
Quelle est la probabilité qu'un microprocesseur sortant de la machine soit accepté ?

A) 0,5

B) 1

C) 0,8

D) 0

E) *J'en passe*